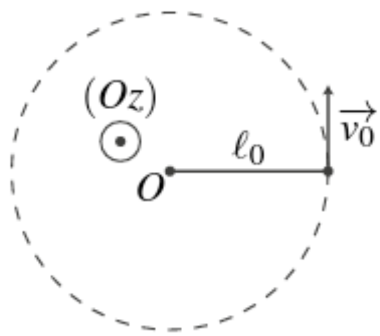
Loi du moment cinétique

Données :

- $\overrightarrow{e_r} = \cos(\theta)\overrightarrow{e_z} + \sin(\theta)\left[\cos(\varphi)\overrightarrow{e_x} + \sin(\varphi)\overrightarrow{e_y}\right]$
- $\overrightarrow{e_\theta} = \sin(\theta)\overrightarrow{e_z} + \cos(\theta)\left[\cos(\varphi)\overrightarrow{e_x} + \sin(\varphi)\overrightarrow{e_y}\right]$
- $\overrightarrow{e_\varphi} = -\sin(\varphi)\overrightarrow{e_x} + \cos(\varphi)\overrightarrow{e_y}$

Exercice n°1 (★)

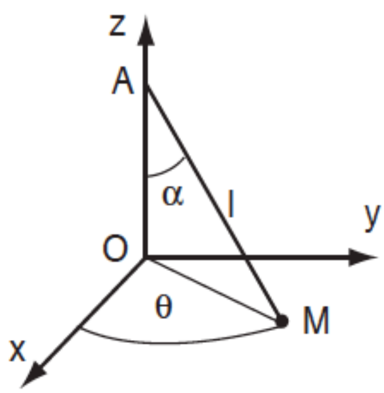
Une sphère de petite taille et de masse $m = 0{,}1\,kg$ est attachée à l'extrémité d'un fil sans masse de longueur $l_0 = 1\,m$ dont l'autre extrémité est fixée en O. Elle se déplace sur un cercle horizontale de rayon l_0. Sa vitesse est $v_0 = 1\,m.s^{-1}$.



1. Déterminer son moment cinétique par rapport à O puis par rapport à (Oz).
2. On réduit brutalement la longueur du fil à $l_1 = 0{,}5\,m$. Que devient la vitesse de la sphère ?
3. Comparer l'énergie cinétique avant et après la réduction de longueur du fil.
4. Quelle force provoque l'augmentation de l'énergie cinétique de la sphère ? Commenter.

Exercice n°2 (★★)

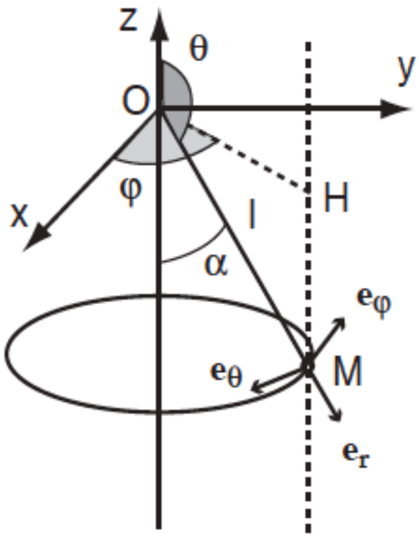
Un point matériel M, de masse m, lié par un fil inextensible de longueur l à un point fixe A, tourne avec une vitesse angulaire constante ω autour de l'axe (Az).



1. α étant l'angle que forme AM avec la verticale, calculer la tension du fil T puis l'angle α en fonction de m, g, l et ω.
2. Calculer en coordonnées cylindriques d'origine O l'expression du moment cinétique de M par rapport à A. Vérifier que sa dérivée par rapport au temps est égale au moment par rapport à A de la résultante des forces appliquées à M.

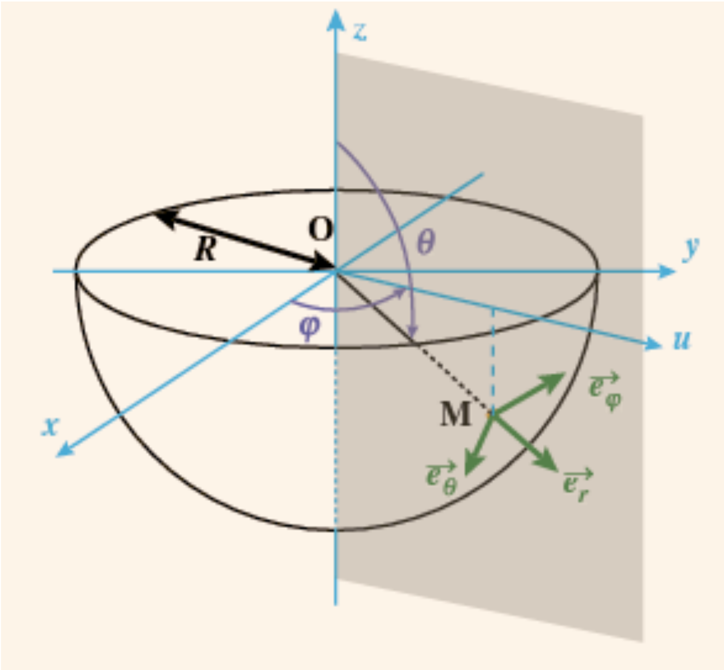
Exercice n°3 (★★★)

L'extrémité O d'un fil OM de masse négligeable et de longueur l est fixée. Un objet quasi ponctuel de masse m est suspendu en M. L'objet est écarté d'un angle α par rapport à la verticale puis lancé. Par application du théorème du moment cinétique, exprimer la vitesse initiale qu'il faut donner à l'objet pour qu'il décrive de manière uniforme des cercles horizontaux. On utilisera les coordonnées sphériques.



Exercice n°4 (★★★)

On considère le mouvement d'un point matériel M de masse m dans une cuvette hémisphérique de rayon R et de centre O. Le plan horizontal (xOy) délimite la sphère qui se trouve au-dessous. On note (Oz) l'axe vertical orienté vers le haut. On travaille en coordonnées sphériques.



À $t = 0$, on lance la masse à la surface (intérieure) de la cuvette en un point de départ tel que $\theta = \theta_0$ et $\varphi = 0$ avec $\dot{\theta} = 0$ et $\dot{\varphi} = \varphi_0$.

1. Donner l'expression du vecteur vitesse pour un instant t quelconque en supposant que le mobile reste en permanence sur la sphère. En déduire l'expression du moment cinétique du mobile.
2. En appliquant le théorème du moment cinétique, établir qu'une projection du moment cinétique sur un axe à déterminer est constante. En déduire que la quantité $\dot{\varphi}\sin^2(\theta)$ est une constante du mouvement que l'on déterminera. Quelles conséquences sur le mouvement de la masse peut-on en déduire ?